

# Ćwiczenie 3

Pomiar współczynnika oporu liniowego

Sygnatura stanowiska: **HM150.1**

Mechanika Płynów, Ćwiczenia Laboratoryjne.  
Katedra Podstawowych Problemów Energetyki,  
Wydział Energetyki i Paliw, AGH  
v1.0b, 2024

## Streszczenie

- Wykonanie ćwiczenie polega na pomiarze **strat ciśnienia** ( $\Delta P$ ) w rurce miedzianej, dla różnych natężeń przepływu ( $\dot{V}$ ).
- Straty ciśnienia wyznacza się mierząc ciśnienie na początku i na końcu rurki, a następnie je odejmując.
- Celem ćwiczenia jest wyznaczenie **współczynników oporów liniowych** na podstawie strat ciśnienia w zależności od rodzaju przepływu:
  - Laminarny
  - Turbulentnyoraz porównanie otrzymanych wyników z danymi literaturowymi.

## Spis treści

Wstęp .....	1
Stanowisko pomiarowe .....	4
Analiza wyników i sprawozdanie .....	10
Dodatki .....	17

## 1. Wstęp

Wyobraźmy sobie, że nasz dział ma zaprojektować rurociąg mosiężny do transportu ropy naftowej. Otrzymaliśmy zadanie określenia strat ciśnienia podczas przepływu przez ten rurociąg oraz związanymi z nim dodatkowymi kosztami energii.

Przepływ płynu przez kanały takie jak rury powoduje straty ciśnienia – nazywane stratami liniowymi. Do wyznaczenia takich strat możemy posłużyć się dostępnym w naszym laboratorium stanowiskiem pomiarowym. Niestety samo stanowisko jest dosyć małe i nie jesteśmy w stanie zmierzyć strat ciśnienia w faktycznym rurociągu, a dodatkowo nie możemy użyć ropy naftowej. Na nasze szczęście straty możemy też obliczyć znając współczynnik oporu liniowego – a ten już możemy uzyskać z pomiarów w naszym laboratorium. Współczynnik strat liniowych możemy także uzyskać z tablic, wykresów i korelacji – będzie to stanowiło doniesienie dla otrzymanych przez nas wyników.

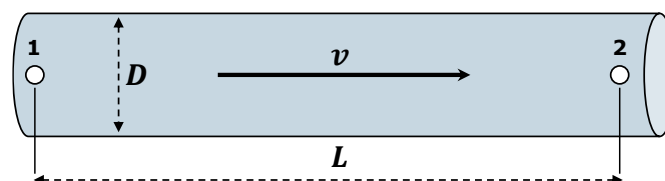
### Cele ogólne:

- Pomiar strat ciśnienia w rurce dla przepływu laminarnego i turbulentnego.
- Wyznaczenie współczynników oporu liniowego.
- Analiza otrzymanych wyników i porównanie ich z wartościami literaturowymi.
- Obliczenie spadku ciśnienia w projektowanym rurociągu oraz kosztu energii z tym związanego.

### Straty liniowe

Przepływ przez kanały zamknięte o przekroju okrągłym (jak rury), prostokątnym (kanały wentylacyjne) czy inne powoduje straty, które są obserwowane jako spadek ciśnienia statycznego płynu. Straty te nazywamy liniowymi. Źródłem strat liniowych jest tarcie cząstek płynu o siebie (cząsteczki płynu „przylepiają” się do ścianki a pozostałe trą o nie). Tarcie to powoduje rozpraszanie energii mechanicznej płynu jako ciepło.

Rozważmy przepływ przez rurę o średnicy  $D$  i długości  $L$ .



Ciśnienie w punkcie 2 będzie mniejsze niż w punkcie 1, jest to spadek ciśnienia, czyli straty. Straty te zależą od średnicy rury, jej długości i prędkości średniej (do kwadratu), a wyznacza się je za pomocą wzoru (równanie *Darcy'ego-Weisbacha*):

$$\Delta P = \lambda \frac{L \rho v^2}{D} \text{ [Pa]} \quad (1)$$

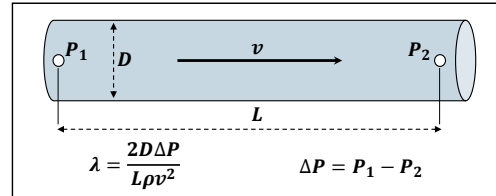
gdzie:  $\Delta P$  jest różnicą ciśnień statycznych pomiędzy punktem 1 i 2, Pa;  $L$  jest długością rury, m;  $D$  jest średnicą rury, m;  $\rho$  jest gęstością płynu, kg/m<sup>3</sup>;  $v$  jest prędkością średnią płynu;  $\lambda$  jest współczynnikiem strat liniowych (lub symbol  $f$ ), nie ma jednostki.

Dla przepływu laminarnego współczynnik ten zależy głównie od liczby Reynoldsa i można wyznaczyć go teoretycznie. Dla przepływu turbulentnego współczynnik ten zależy od liczby Reynoldsa i chropowatości względnej  $\varepsilon/D$  (czyli chropowatości podzielonej przez średnicę rury). Niestety dla przepływu turbulentnego zależności na współczynnik oporu nie da się wyznaczyć teoretycznie. Znamy natomiast równania przybliżone (wzory empiryczne, korelacje), które powstały poprzez wykonywanie serii eksperymentów, a następnie

dopasowywanie (aproxymacja) wzoru tak aby była jak najbliższym danym pomiarowym. Jednym z bardziej znanych jest równanie (korelacja) *Colebrooka*. Wartości współczynnika oporu dla przepływu turbulentnego można także odczytać z wykresu *Moody'ego* który jest reprezentacją graficzną równania *Colebrooka*.

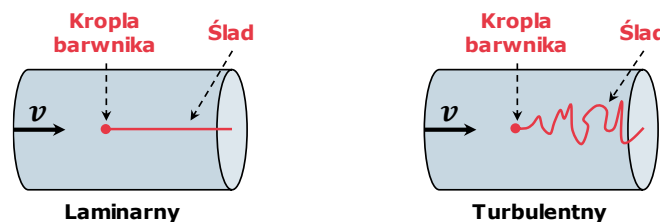
### Jak wyznacza się współczynnik strat liniowych eksperymentalnie?

Wyznaczenie współczynnika sprowadza się do zmierzenia ciśnienia statycznego na początku i końcu rury, a następnie podstawienia do przekształconego wzoru (1). Prędkość można wyznaczyć znając natężenie przepływu (też z pomiaru).



### Przepływ laminarny i turbulentny, liczba Reynoldsa

Przepływ laminarny (inaczej warstwowy) charakteryzuje się tym, że warstwy płynu nie mieszają się między sobą, jest on ustrukturyzowany i niechaotyczny. Przepływ turbulentny (inaczej burzliwy) charakteryzuje się intensywnym mieszaniem, fluktuacjami prędkości i chaotycznością. Możemy wyróżnić jeszcze przepływ przejściowy – pomiędzy laminarnym a turbulentnym. W życiu najczęściej mamy do czynienia z przepływami turbulentnymi.



Liczba Reynoldsa jest jedną z bezwymiarowych liczb podobieństwa. Umożliwia porównywanie przepływów pomiędzy sobą – jeżeli dwa płyny (np. powietrze i olej) płyną rurami o różnych średnicach i mają różne prędkości, ale liczba Reynoldsa jest taka sama to te przepływy są podobne hydrodynamicznie. Liczba Reynoldsa pozwala określić charakter przepływu – laminarny czy turbulentny. Jest to stosunek sił bezwładnościowych do sił lepkościowych:

$$Re = \frac{\rho v D_h}{\mu} \quad (2)$$

gdzie:  $\rho$  jest gęstością,  $\text{kg/m}^3$ ;  $v$  jest prędkością średnią,  $\text{m/s}$ ;  $\mu$  jest dynamicznym współczynnikiem lepkości,  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ;  $D_h$  jest to średnica hydrauliczna i dla rury jest ona równa jej średnicy wewnętrznej,  $\text{m}$ . Dla kanałów o przekroju innym niż kołowy średnica hydrauliczna  $D_h = \frac{4A}{p}$ ,  $A$  jest polem przekroju kanału,  $\text{m}^2$ ;  $p$  jest obwodem kanału,  $\text{m}$ .

Liczba Reynoldsa powyżej której przepływ staje się turbulentny nazywana jest krytyczną liczbą Reynoldsa –  $Re_{kr}$ . Jest ona zależna od geometrii kanału natomiast nie ma znaczenia jaki płyn w nim płynie i o jakiej prędkości – wartość zawsze wynosić będzie tyle samo. Dla rury przyjmuje się, że  $Re_{kr}$  wynosi 2300. Dla większości analizowanych przepływów w rurach uznaje się następujący podział:

- $Re < 2300$  – przepływ laminarny,
- $2300 < Re < 4000$  – przepływ przejściowy,
- $Re > 4000$  – przepływ turbulentny.

Należy pamiętać, że są to wartości szacunkowe i nie oznacza to, że w rzeczywistości dla  $Re = 2300$  będzie mieli przepływ laminarny.

## Materiały pomocnicze

- **Fluid Mechanics Fundamentals and Applications** - Yunus Cengel, John Cimbala
  - Klasyfikacja przepływów, strona: 9
  - Gęstość, strona: 39
  - Lepkość, strona: 50
  - Ciśnienie, strona: 76
  - Pomiar ciśnienia, strona: 81
  - Przepływ laminarny i turbulentny, strona: 349
  - Straty liniowe, strona: 355 i 367
  - Pomiar objętościowego natężenia przepływu i prędkości, strona: 391
- **Fluid Mechanics** - Frank M. White
  - Straty liniowe, strona: 341 i 344
- [http://www.strzelecki.net.pl/media/pliki/hih/skrypt\\_z\\_plynow.pdf](http://www.strzelecki.net.pl/media/pliki/hih/skrypt_z_plynow.pdf)
- [https://www.gunt.de/images/download/flow-in-pipes-and-fittings\\_english.pdf](https://www.gunt.de/images/download/flow-in-pipes-and-fittings_english.pdf)
- <https://innovationspace.ansys.com/courses/wp-content/uploads/sites/5/2020/06/Fluid-Statics-Lesson3-Barometers-and-Manometers-Handout.pdf>
- <https://innovationspace.ansys.com/courses/wp-content/uploads/sites/5/2020/06/What is a Fluid-Lesson3-Flow Classification-Handouts.pdf>
- <https://innovationspace.ansys.com/courses/wp-content/uploads/sites/5/2020/09/Lesson-2-Fully-Developed-Internal-Turbulent-Flows-in-Ducts-and-Pipes-Handout.pdf>
- <https://innovationspace.ansys.com/courses/wp-content/uploads/sites/5/2020/09/Lesson-3-Major-Losses-in-Pipes-and-Ducts-Handout.pdf>
- [Liczba Reynoldsa](#)
- Przepływ laminarny i turbulentny:
  - <https://www.youtube.com/watch?v=5zI9sG3pjVU>
  - <https://www.youtube.com/watch?v=9A-uUG0WR0w>
- [Równanie Bernoulliego](#)
- [https://www.viessmann.edu.pl/wp-content/uploads/OIR3\\_BD17\\_SEO\\_Obliczenia\\_inst\\_rurowych\\_cz3\\_AJT\\_24\\_04\\_2019.pdf](https://www.viessmann.edu.pl/wp-content/uploads/OIR3_BD17_SEO_Obliczenia_inst_rurowych_cz3_AJT_24_04_2019.pdf)

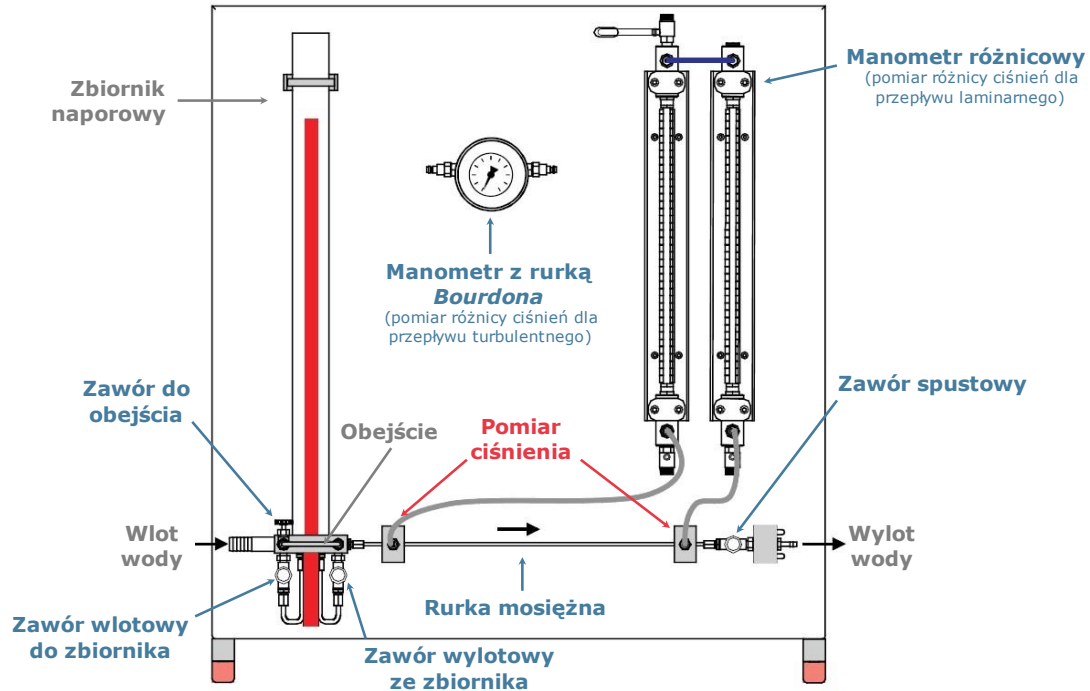
## Zagadnienia teoretyczne:

- Objętościowy wydatek przepływu (natężenie przepływu)
- liczba Reynoldsa
- średnica hydrauliczna
- przepływ laminarny i turbulentny
- krytyczna wartość liczby Reynoldsa
- Równanie Darcy'ego-Weisbacha
- Współczynnik oporu liniowego przy przepływie laminarnym oraz turbulentnym

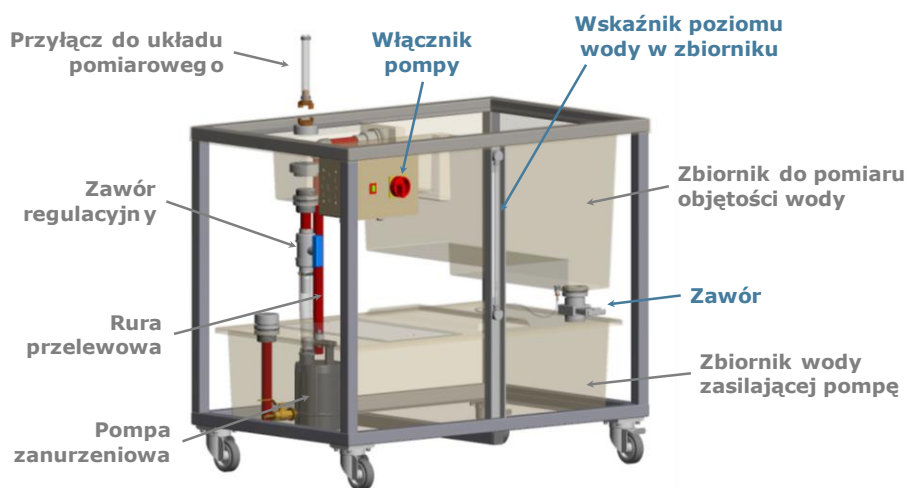
## 2. Stanowisko pomiarowe

### Schemat układu i jego elementy pomiarowe

#### Układ pomiarowy HM150.1:



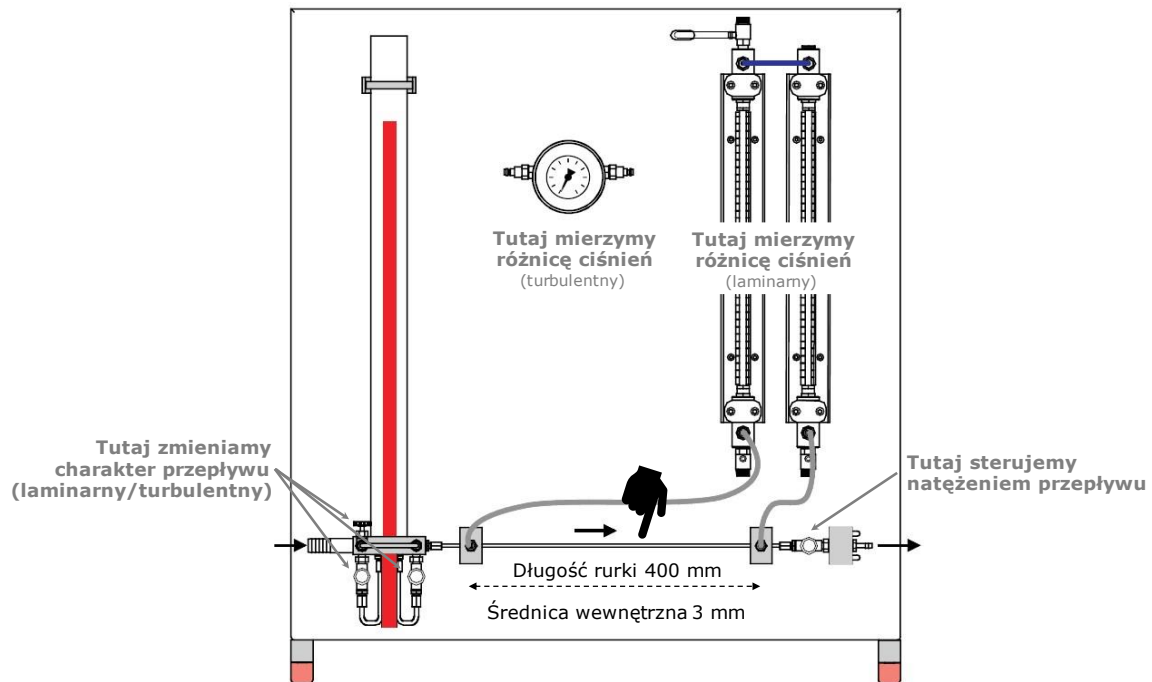
Układ pomiarowy znajduje się na wózku (moduł bazowy), który zawiera pompę, przyłączy doprowadzające wodę do układu pomiarowego, zbiornik na wodę wypływającą z układu pomiarowego oraz zbiornik i aparaturę do pomiaru natężenia przepływu.



## Co należy zrobić w trakcie zajęć laboratoryjnych?

- Ćwiczenie składa się z dwóch części:
  - część I – wykonanie jednej serii pomiarów dla przepływu laminarnego,
  - część II – wykonanie jednej serii pomiarów dla przepływu turbulentnego.
- Każda seria pomiarowa składa się z minimum 7 pomiarów.
- Dla każdego pomiaru odczytujemy różnicę ciśnień (na początku i końcu rurki mosiężnej) oraz mierzymy objętościowe natężenie przepływu.

Szczegóły są uzgadniane na początku wykonania ćwiczenia z prowadzącym.

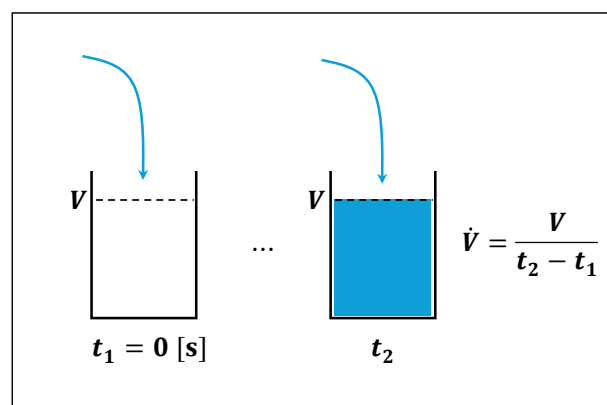
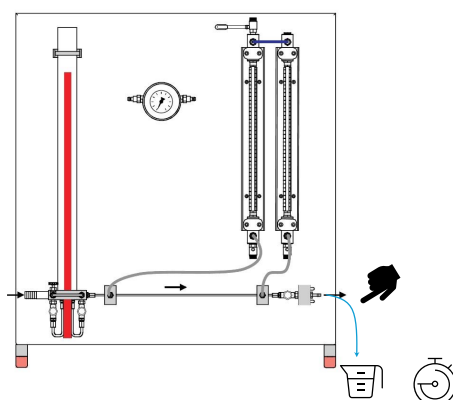


## Pomiary

### Jak mierzymy natężenie przepływu?

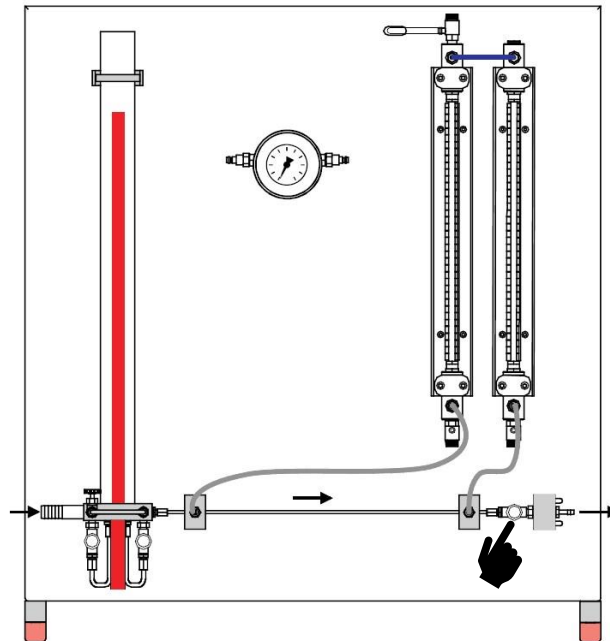
Do pomiaru objętościowego natężenia przepływu  $\dot{V}$  wykorzystuje się zbiornik (lub naczynie) oraz stoper. Pomiar polega na odmierzeniu czasu potrzebnego do zapełnienia określonej przez nas objętości wodą. Pod wylot wody ze stanowiska pomiarowego podkładamy puste naczynie o znanej objętości, uruchamiamy stoper, gdy woda osiągnie wymaganą przez nas objętość naczynia zatrzymujemy stoper. Uwaga na jednostki.

**Natężenie przepływu** inaczej wydatek objętościowy lub strumień objętościowy  $\dot{V}$  – objętość przepływającego płynu na jednostkę czasu, np. litry/h, m<sup>3</sup>/h, m<sup>3</sup>/s itd.



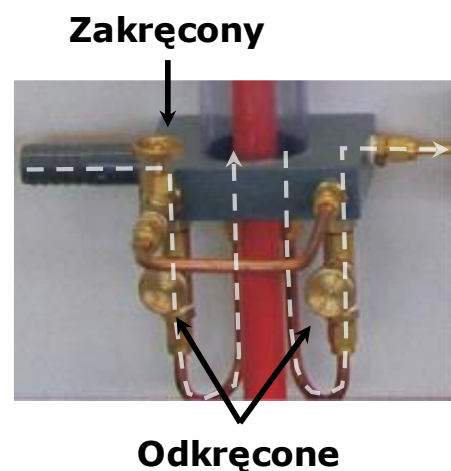
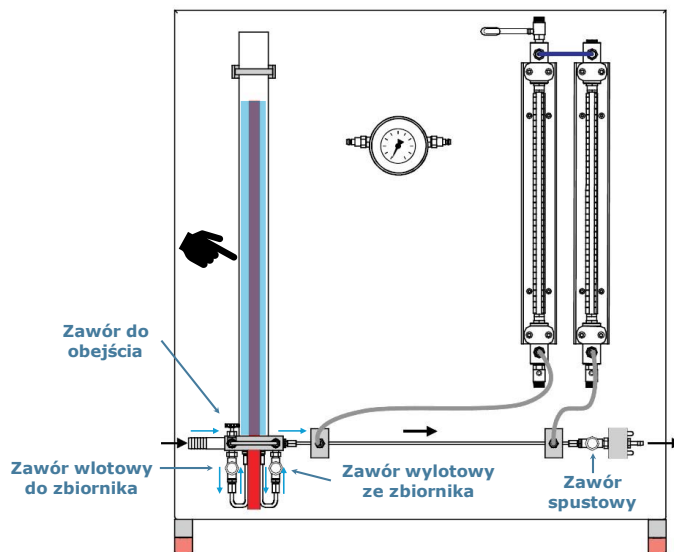
## Jak zmieniamy natężenie przepływu?

Natężenie przepływu zmieniamy za pomocą zaworu spustowego.



## Jak ustawiamy przepływ laminarny?

Przepływ laminarny osiąga się przez puszczenie wody przez zbiornik naporowy (a nie bezpośrednio) – wypływ ze zbiornika naporowego następuje z małą prędkością. Aby tego dokonać, należy zakręcić zawór do obejścia i odkręcić zawory wlotowy i wylotowy ze zbiornika naporowego. Dodatkowo należy ustabilizować poziom wody w zbiorniku naporowym (ma się przelewać przez czerwoną rurkę) oraz wyregulować przepływ – przy pomocy zaworów wlotowego/wylotowego ze zbiornika oraz zaworu spustowego.

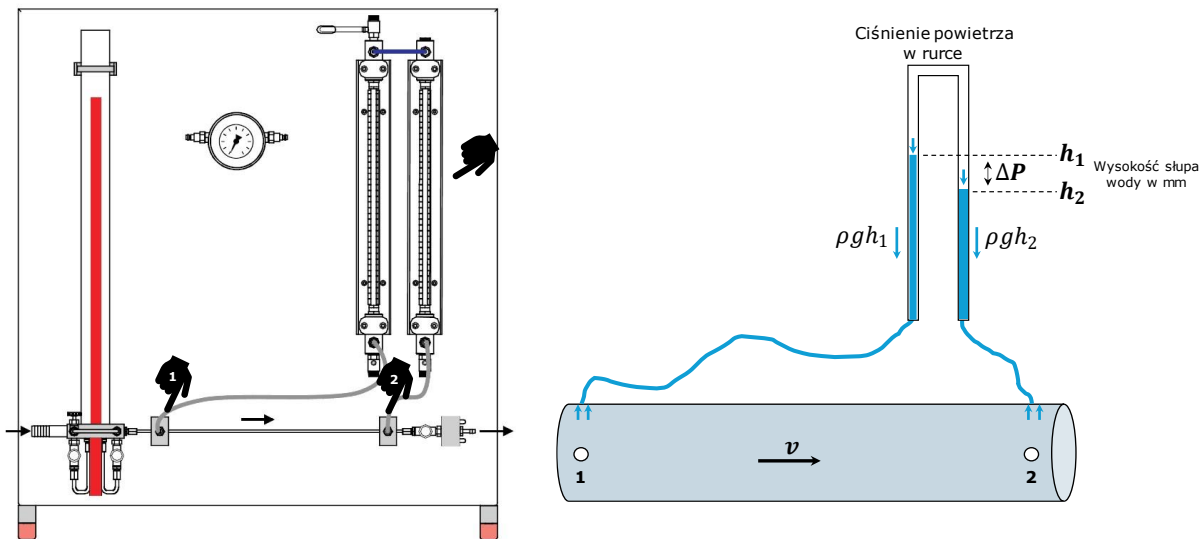


## Jak mierzymy różnicę ciśnienia (dla przepływu laminarnego)?

Dla przepływu laminarnego mierzymy różnicę ciśnień statycznych (pomiędzy początkiem rury a jej końcem) za pomocą manometru różnicowego. Manometr podłączamy rurkami do punktów pomiaru (1) i (2).

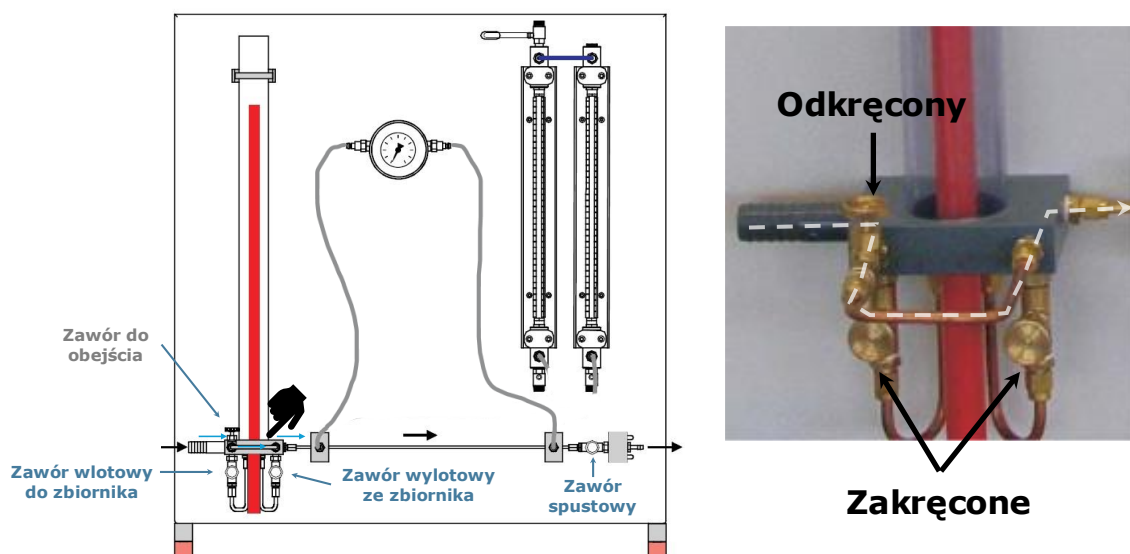
Przepływająca przez rurę woda napiera na wodę znajdującą się w rurkach manometru. Poziom wody w rurce manometrycznej będzie się podnosił, dopóki ciśnienie powietrza w manometrze plus ciśnienie hydrostatyczne słupa wody w manometrze nie będzie równe ciśnieniu statycznemu wody przepływającej przez rurę.

Pomiar dokonujemy poprzez odczytanie różnicy wysokości słupa wody w mm – inaczej różnica pomiędzy zwierciadłami wody. Do każdej rurki dołączona jest skala w milimetrach. Zakres pomiarowy 0 – 500 mm. Uwaga, do dalszych obliczeń należy zamienić jednostki.



## Jak ustawiamy przepływ turbulentny?

Przepływ turbulentny osiąga się przez puszczenie wody za pomocą obejścia bezpośrednio do rury miedzianej (z pominięciem zbiornika naporowego). Aby tego dokonać, należy zakręcić zawory wlotowy i wylotowy ze zbiornika naporowego i odkręcić zawór do obejścia. Dodatkowo należy ustabilizować i wyregulować przepływ – przy pomocy zaworu spustowego.



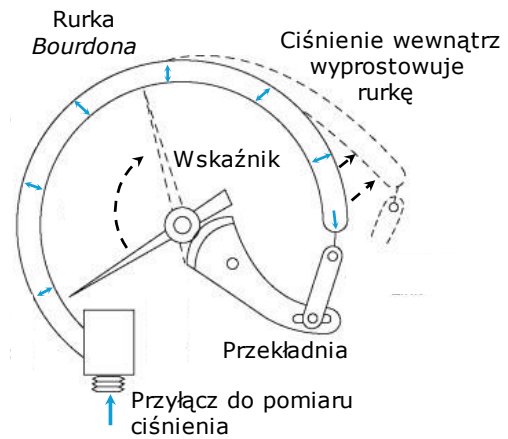
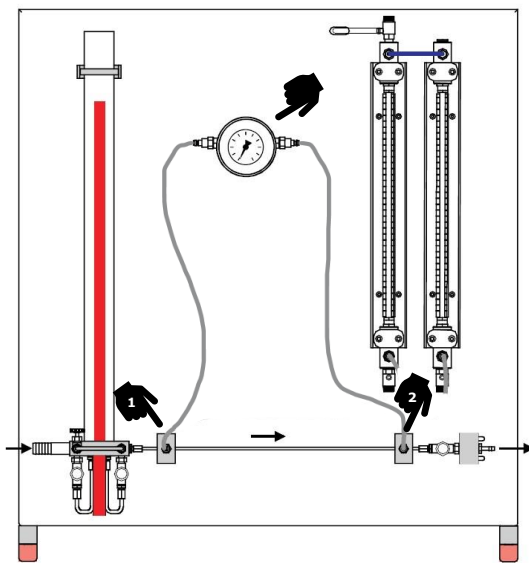


## Jak mierzymy różnicę ciśnień (dla przepływu turbulentnego)?

Dla przepływu turbulentnego mierzymy różnicę ciśnień statycznych (pomiędzy początkiem rury a jej końcem) bezpośrednio za pomocą manometru różnicowego z rurką Bourdona. Manometr podłączamy rurkami do punktów pomiaru (1) i (2).

Manometr ten zawiera wydrążoną i skręconą jak spirala metalową rurkę (*rurka Bourdona*). Gdy na wnętrze tej spiralnej rurki działa ciśnienie to odkształca ją (coś jak trąbka/gwizdek urodzinowy), odkształcenie to jest tak skalibrowane, że połączony z nią wskaźnik pokazuje mierzone ciśnienie statyczne. W przypadku pomiaru różnicy ciśnień – w manometrze znajdują się dwie osobne rurki Bourdona, a mechanizm jest tak skalibrowany, że pokazuje różnicę ciśnień statycznych.

Pomiar dokonujemy poprzez bezpośrednie odczytanie różnicy ciśnienia w bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ). Zakres pomiarowy 0 – 0.4. bar. Uwaga, do dalszych obliczeń należy zamienić jednostki.



## Procedura pomiarowa

### Przygotowanie układu

- Upewnij się, że w zbiorniku wody zasilającej pompę, poziom wody jest nie niżej, niż 10 cm od górnej krawędzi zbiornika (pompa musi być zanurzona w wodzie), jeżeli nie jest **zgiłoś prowadzącemu**.
- Sprawdź, czy urządzenie jest podłączone do prądu.
- Sprawdź czy wszystkie zawory (zawór do obejścia, zawór spustowy, zawór wlotowy i wylotowy do zbiornika naporowego) są otwarte.
- Sprawdź i zapisz wartość temperatury panującej w pomieszczeniu.
- Przed przystąpieniem do pomiarów należy odpowietrzyć układ (przy pomocy prowadzącego).

### Część I – przepływ laminarny

- 1 Podłącz manometr różnicowy do odpowiednich punktów pomiaru ciśnienia.
- 2 Zamknij zawór do obejścia.
- 3 Włącz pompę.
- 4 Za pomocą zaworu wlotowego ureguluj przepływ, tak aby poziom wody w zbiorniku naporowym był stały (ma się przelewać przez czerwoną rurkę w środku).
- 5 Za pomocą zaworu spustowego wyreguluj przepływ tak, aby manometr pokazywał stabilną różnicę wysokości np. 2 cm (słupa wody). Zapisz ją.
- 6 Za pomocą naczynia i stopera dokonaj pomiaru objętościowego natężenia przepływu (w każdym przypadku mierzona objętość powinna być identyczna). Zapisz je.
- 7 Kontynuuj dalej pomiary (powtarzając punkty 5 i 6) zwiększając różnice wysokości słupa wody w manometrze (np. 2, 4, 6, 8 itd. cm) do uzyskania 7 różnych pomiarów.
- 8 Po zakończeniu pomiarów wyłącz pompę i otwórz wszystkie wcześniej zamknięte zawory.

### Część II – przepływ turbulentny

- 1 Podłącz manometr różnicowy z rurka *Bourdona* do odpowiednich punktów pomiaru ciśnienia.
- 2 Zamknij zawór wlotowy i wylotowy do zbiornika naporowego.
- 3 Włącz pompę.
- 4 Za pomocą zaworu wlotowego ureguluj przepływ, tak aby był stabilny.
- 5 Za pomocą zaworu spustowego wyreguluj przepływ tak, aby manometr pokazywał stabilną różnicę ciśnienia np. 50 mbar. Zapisz ją.
- 6 Za pomocą naczynia i stopera dokonaj pomiaru objętościowego natężenia przepływu (w każdym przypadku mierzona objętość powinna być identyczna). Zapisz je.
- 7 Kontynuuj dalej pomiary (powtarzając punkty 5 i 6) zwiększając za każdym razem różnice ciśnienia w manometrze, aż do uzyskania 7 różnych pomiarów.
- 8 Po zakończeniu pomiarów wyłącz pompę i otwórz wszystkie wcześniej zamknięte zawory. W razie potrzeby doprowadź do porządku stanowisko pomiarowe.

### 3. Analiza wyników i sprawozdanie

#### Co należy zrobić?

1. Wyznaczyć: prędkości średnie, spadki ciśnień, liczby Reynoldsa oraz współczynniki oporu dla rury mosiężnej - osobno dla przepływu laminarnego i turbulentnego
2. Przeprowadzić analizę niepewności pomiarowych.
3. Porównać otrzymane wyniki z wartościami z korelacji. Przeanalizować otrzymane różnice.
4. Wyliczyć całkowity spadek ciśnienia w projektowanym rurociągu bazując na otrzymanych wynikach i przeprowadzonej analizie. Policzyć dodatkowy koszt energii związanej z tymi stratami.
5. Zaprezentować analizę oraz wyniki w formie sprawozdania.

#### Wzory ogólne

##### Natężenie przepływu, prędkość średnia, liczba Reynoldsa

Objęściowe natężenie przepływu (wody przepływającej rurą mosiężną) określamy mierząc czas potrzebny do wypełnienia określonej objętości naczynia pomiarowego, a następnie używając wzoru:

$$\dot{V} = \frac{V}{t} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \quad (3)$$

gdzie:  $V$  jest objętością naczynia pomiarowego,  $\text{m}^3$ ;  $t$  jest czasem potrzebnym do jego napełnienia, s. Uwaga, objętość naczynia pomiarowego nie jest podana w  $\text{m}^3$ , należy wcześniej zamienić jednostki!

Pomiar natężenia przepływu  $\dot{V}$  umożliwi nam wyliczenie prędkości średniej wody przepływającej przez rurkę. Natężenie przepływu jest stałe i takie same w całym układzie (woda jest płynem nieściśliwym, średnica rury jest stała). Do wyliczenia prędkości średniej przekształcamy wzór:

$$\dot{V} = vA \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \quad (4)$$

gdzie:  $v$  jest prędkością średnią,  $\text{m/s}$ ;  $A$  jest polem przekroju rury,  $\text{m}^2$ . Do wyznaczenia pola przekroju rury wykorzystujemy średnicę wewnętrzną:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \left[ \text{m}^2 \right] \quad (5)$$

gdzie:  $D$  jest średnicą wewnętrzną rury, m. Średnica wewnętrzna rury mosiężnej wynosi 3 mm. Uwaga na jednostki!

Do policzenia liczby Reynoldsa dla każdego pomiaru korzystamy ze wzoru (2). Za wymiar charakterystyczny (średnicę hydrauliczną) używamy średnicy wewnętrznej rury. Prędkość średnią wyznaczamy ze wzoru (4), a za gęstość oraz lepkość podstawiamy wartości odczytane z tablic dla danej temperatury.

##### Ciśnienie

Dla przepływu laminarnego ciśnienie mierzymy w  $\text{mmH}_2\text{O}$ , a dla turbulentnego w  $\text{mbar}$ , w takiej sytuacji najlepiej od razu zamienić te jednostki na Pa. Dla przepływu laminarnego korzystamy ze wzoru na ciśnienie hydrostatyczne:

$$\Delta P = \rho g \Delta h \text{ [Pa]} \quad (6)$$

gdzie:  $\rho$  jest gęstością płynu w manometrze (woda),  $\text{kg/m}^3$ ;  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim,  $9.81 \text{ m/s}^2$ ;  $\Delta h$  jest różnicą wysokości słupa wody w manometrach, m. Uwaga na jednostki, dla przepływu turbulentnego wystarczy zwykła konwersja:  $1 \text{ [bar]} = 10^5 \text{ [Pa]}$ .

### Spadek ciśnienia w projektowanym rurociągu i oszacowanie kosztów

Jeżeli udało nam się wyliczyć współczynnik oporu – lub uzyskać jego zależność od liczby Reynoldsa, to do wyznaczenia całkowitego spadku ciśnienia w projektowanym rurociągu używamy wzoru (1), gdzie należy podstawić za  $\lambda$  wyliczoną przez nas wartość współczynnika oporu, za  $L$  długość projektowanego rurociągu, za  $D$  średnicę projektowanego rurociągu, za  $\rho$  gęstość płynu przebywającego przez projektowany rurociąg, a za  $v$  prędkość średnią płynu przepływającego przez projektowany rurociąg. Uwaga wartości te będą inne niż w ćwiczeniu laboratoryjnym, uwaga na jednostki!

Moc pompy potrzebna na pokonanie strat przepływu przez projektowany rurociąg wynosi:

$$W = \frac{\dot{V} \Delta P}{\eta} \text{ [W]} \quad (7)$$

gdzie:  $\eta = 0.7$  jest sprawnością pompy;  $\dot{V}$  jest objętościowym natężeniem przepływu w projektowanym rurociągu,  $\text{m}^3/\text{s}$ ;  $\Delta P$  są całkowitymi stratami ciśnienia w rurociągu, Pa.

Średni koszt energii elektrycznej wynosi  $1 \text{ zł/kWh}$ .

### Współczynnik strat liniowych

Do wyznaczenia współczynnika strat liniowych używamy przekształconego równania (1):

$$\lambda = \frac{2D\Delta P}{L\rho v^2} \quad (8)$$

Do równania podstawiamy wartości wyliczone przez nas wcześniej na bazie wykonanych pomiarów. Gęstość podajemy dla wody w odpowiedniej temperaturze. Średnica wewnętrzna rury miedzianej na stanowisku pomiarowym wynosi  $3 \text{ mm}$ , a jej długość to  $400 \text{ mm}$ . Uwaga na jednostki!

Wyliczone wartości współczynników możemy porównać z wartościami uzyskanymi ze wzorów empirycznych (korelacji) – przy założeniu, że przepływ jest w pełni rozwinięty. Pozwoli nam to sprawdzić czy nasze wyniki są akceptowalne i jakie są różnice.

**Przepływ w pełni rozwinięty** oznacza, że profil prędkości płynu w rurze nie zmienia się wzdłuż jej długości.

**Przepływ stacjonarny** oznacza, że prędkość płynu w danym miejscu nie zmienia się z czasem.

### Zależność współczynnika od liczby Reynoldsa - aproksymacja

Współczynnik strat liniowych wyliczamy dla każdej (odpowiadającej pomiarowi) liczbie Reynoldsa, osobno dla przepływu laminarnego i turbulentnego. Dodatkowo można spróbować opisać uzyskane przez nas wartości eksperymentalne współczynnika oporu funkcją potęgową (przeprowadzić aproksymację średniokwadratową) postaci:

$$y = ax^b \quad (9)$$

gdzie:  $\gamma$  jest współczynnikiem strat liniowych;  $x$  jest liczbą Reynoldsa;  $a$  i  $b$  są szukanymi wartościami stałymi. Równanie to reprezentuje ogólną zależność na współczynnik strat liniowych:

$$\lambda = \frac{a}{Re^b} \quad (10)$$

Przykładem takiej zależności jest równanie *Blasiusa* (14).

Przybliżenie to (aproxymacja średniokwadratowa) należy wykonać oddzielnie dla przepływu laminarnego i turbulentnego. Można tego dokonać np. w *Excelu* – na wykresie współczynnika strat liniowych od liczby Reynoldsa (np. dla przepływu turbulentnego) dodajemy linię trendu a następnie w opcjach wybieramy funkcję potęgową i zaznaczamy opcję wyświetlenia równania na wykresie – będzie ono w postaci równania (9).

### Wzór na współczynnik oporu liniowego dla przepływu laminarnego

Dla przepływu laminarnego współczynnik strat liniowych  $\lambda = f(Re)$  zależy głównie od liczby Reynoldsa i można wyznaczyć go teoretycznie – dla przepływu przez rurę wynosi on:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (11)$$

Dla innych przekrojów kanału wartość licznika będzie trochę inna, np. dla kanału o przekroju kwadratowym:  $\lambda = \frac{56.92}{Re}$ .

### Wzory empiryczne na współczynnik oporu liniowego dla przepływu turbulentnego

Dla przepływu turbulentnego współczynnik  $\lambda = f(Re, \varepsilon/D)$  zależy od liczby Reynoldsa i chropowatości względnej  $\varepsilon/D$ . Niestety dla przepływu turbulentnego zależności na współczynnik oporu nie da się wyznaczyć teoretycznie. Znamy natomiast wzory empiryczne (korelacje), jedną z bardziej znanych i uniwersalnych jest równanie *Colebrooka* (wzór *Colebrooka-White'a*):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (12)$$

gdzie:  $\varepsilon$  jest chropowatością, m;  $D$  jest średnicą wewnętrzną rury, m;  $\log$  oznacza logarytm dziesiętny. Równanie to powstało dla przepływu przez rury, ale można je także stosować dla innych przekrojów, wtedy zamiast średnicy, używamy średnicy hydraulicznej.

Niestety równanie (12) jest równaniem nieliniowym (funkcja uwikłana) – do jego rozwiązania potrzeba użycia metod numerycznych, z tego też powodu jest problematyczna w użytkowaniu. Dlatego zamiast równania (12) użyjemy jego uproszczonych form przedstawionych poniżej.

Szacunkowe wartości współczynnika oporu liniowego można odczytać z wykresu *Moody'ego* ([Dodatek](#)).

Przybliżone równanie (w postaci jawnej), które uwzględnia chropowatość względną i dające zgodność do 2% z równaniem *Colebrooka* zostało zaproponowane przez *Haalanda* i wygląda następująco:

**Chropowatość  $\varepsilon$**  jest pojęciem względnym. Pod mikroskopem wszystkie powierzchnie są chropowate. W przypadku przepływów mówimy o chropowatości gdy nierówności powierzchni wystają ponad podwarstwę lepka (w warstwie przyściennej). Jeżeli tak nie jest to mówimy, że rura jest gładka hydrodynamicznie.

Przykładowe wartości znajdują się w [Dodatku](#).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cong -1.8 \log \left( \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right) \quad (13)$$

Wartość chropowatości  $\varepsilon$  dla mosiądzu możemy znaleźć w tablicach lub w [Dodatku](#).

Poza przedstawionymi powyżej zależnościami logarytmicznymi zaproponowane zostały potęgowe wzory empiryczne. Jedną z bardziej popularnych jest wzór *Blasiusa*:

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (14)$$

Korelacja ta jest przeznaczona dla rur gładkich (nie uwzględnia chropowatości), i można ją stosować dla wartości liczby Reynoldsa pomiędzy 4000 a 100000.

## Niepewności pomiarowe

W trakcie przeprowadzania eksperymentu mierzymy bezpośrednio:

- czas potrzebny do napełnienia naczynia pomiarowego  $t$  s,
- objętość wody w naczyniu pomiarowym  $V$  m<sup>3</sup>,
- różnice wysokości wody w manometrze różnicowym (przepływ laminarny)  $\Delta h$  mm oraz różnice ciśnienia w manometrze różnicowym z rurką *Bourdona* (przepływ turbulentny)  $\Delta P$  bar.

Związane z nimi niepewności pomiarowe to odpowiednio:  $u(t)$ ,  $u(V)$ ,  $u(\Delta h)$ ,  $u(\Delta P)$ . Podczas wykonywania pomiaru jak i przygotowywania sprawozdania należy się nad nimi zastanowić i je określić. Musimy się także zastanowić czy w trakcie dokonywania pomiarów występują inne niepewności i czy powinniśmy je wziąć pod uwagę.

Pozostałe zmienne, takie jak:

- objętościowe natężenie przepływu  $\dot{V}$ ,
- prędkość średnia  $v$ ,
- liczba Reynoldsa  $Re$ ,
- współczynnik oporu  $\lambda$

nie są mierzone bezpośrednio, wynikają z wcześniej wspomnianych parametrów  $t$ ,  $V$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta P$ . Nie jesteśmy w stanie określić tych niepewności bezpośrednio, bo ich nie mierzymy. Natomiast musimy je znać i w tym celu wykorzystamy prawo przenoszenia niepewności. Niepewność spadku ciśnienia zgodnie z prawem przenoszenia niepewności wynosi:  $u(\Delta h) = u(h)\sqrt{2}$ . Po ich wyliczeniu ( $u(\dot{V})$ ,  $u(v)$ ,  $u(Re)$ ,  $u(\lambda)$ ) musimy uwzględnić je w analizie – czy to jako wartości liczbowe w tabelach czy w postaci słupków błędów na wykresach. Analiza wyników bez określenia niepewności pomiarowych jest nieakceptowalna.

## Sprawozdanie

- Sprawozdanie należy przygotować w dostępnym szablonie sprawozdania.
- Sprawozdanie musi przedstawiać:
  - wyliczone współczynniki oporu (wraz z niepewnościami),
  - analizę i komentarz do tych wyników (porównanie wyników),
  - wyliczenie całkowitych strat ciśnienia dla projektowanego rurociągu oraz koszt.
- Do każdego obliczenia należy podać wzór, który był użyty wraz z opisem symboli i jednostkami oraz przykład obliczeniowy – wzór z podstawionymi wartościami liczbowymi i wynikiem.
- Wyliczone wartości (jak spadek ciśnienia, prędkości, liczba Reynoldsa, współczynniki oporu, i ich niepewności) należy przedstawić w formie tabelarycznej lub za pomocą wykresów.
- Sprawozdanie musi zawierać analizę niepewności pomiarowych wraz z równaniami jakie zostały użyte.
- Dane pomiarowe (np. zdjęcie) może być dołączone pod sprawozdaniem w formie dodatku.

### Prezentacja wyników

- Wykres współczynnika strat liniowych w zależności od liczby Reynoldsa dla przepływu laminarnego.

Wykres ten pokaże jak współczynnik oporu zależy od liczby Reynoldsa, pomoże w określeniu zależności funkcyjnej oraz pokaże różnice pomiędzy danymi eksperymentalnymi a wartościami policzonymi ze wzoru teoretycznego. Dodatkowo zobaczymy, jak prezentują się niepewności pomiarowe. Na rysunku należy przedstawić wartość współczynnika oporu policzone ze wzoru (11) (w formie linii ciągłej, może być kreskowana). Wykres w formie punktów, należy do każdego dodać słupki błędów – z analizy niepewności.

- Wykres współczynnika strat liniowych w zależności od liczby Reynoldsa dla przepływu turbulentnego.

Wykres ten pokaże jak współczynnik oporu zależy od liczby Reynoldsa, pomoże w określeniu zależności funkcyjnej oraz pokaże różnice pomiędzy danymi eksperymentalnymi a wartościami policzonymi z korelacji. Dodatkowo zobaczymy, jak prezentują się niepewności pomiarowe. Na rysunku należy przedstawić wartość współczynnika oporu policzone ze wzoru (13) i (14) (w formie linii ciągłej, może być kreskowana), dla równania (13) za chropowatość należy przyjąć wartość dla mosiądzu (*Dodatek*). Wykres w formie punktów, należy do każdego dodać słupki błędów – z analizy niepewności.

- Wykres współczynnika strat liniowych w zależności od liczby Reynoldsa dla przepływu laminarnego i turbulentnego.

Wykres ten zawierać będzie wyliczone wartości współczynnika oporu z danych eksperymentalnych. Celem tego wykresu jest pokazanie, czy na podstawie tych wyników określić można krytyczną liczbę Reynoldsa. Czy na jego bazie można określić zakres przepływu laminarnego, przejściowego i turbulentnego?

- Przedstawić sposób obliczeń i wynik wyznaczenia całkowitych strat ciśnienia dla projektowanego rurociągu oraz podania kosztu.

### Co powinna zawierać analiza wyników i dyskusja?

Poniżej przedstawiono pytania, na które odpowiedzi pomogą wykonać dobrą analizę wyników:

- Czy straty ciśnienia zależą od prędkości średniej do kwadratu? Czy można zaobserwować, że współczynnik oporu liniowego jest funkcją liczby Reynoldsa? Co na to wskazuje?
- Czy można zaobserwować w wynikach jakieś anomalie (czy któreś wyniki znacznie odbiegają od pozostałych, albo od teorii)? Jakie może być ich źródło?

- Która niepewność pomiarowa ma największy wpływ na wyniki? Czy poprawa dokładności tego pomiaru przełoży się znacznie na jakość wyników? Dlaczego i jak? Czy wykonanie większej ilości pomiarów w ramach jednej serii miałoby sens? Czy należałoby wykonać więcej serii pomiarowych?
- Jak otrzymane wyniki współczynników oporu mają się do wartości teoretycznej (przepływ laminarny) i korelacji (przepływ turbulentny)? Jakie są różnice procentowe pomiędzy tymi wartościami? Czy różnice są w zakresie niepewności pomiarowych? Czy różnice są akceptowalne? Czy jakieś inne niepewności mogą wpływać na wyniki, a nie zostały uwzględnione?
- Jak wyglądają funkcje którymi można opisać (aproksymować) wartości współczynników oporu wyznaczonych na drodze eksperymentalnej (chodzi o podanie stałych wyliczonych w tych wzorach)?
- Jaki jest wpływ chropowatości na wartości współczynnika oporu? Czy jego zwiększenie bardziej przybliży wyniki eksperymentalne do wartości otrzymanych z korelacji (13)?
- Czy na podstawie przedstawionych wyników można określić obszary przepływu laminarnego, przejściowego i turbulentnego? Jaka będzie krytyczna liczba Reynoldsa? Jak te zakresy odpowiadają zakresom teoretycznym?
- Biorąc pod uwagę całą analizę, czy można zaufać i wykorzystać prezentowane wyniki? Dlaczego i co na to wskazuje? Jakie współczynniki wybrać do wyznaczenia strat ciśnienia w projektowanym rurociągu? Czy z przeprowadzonych pomiarów? Czy może lepiej z korelacji? A może z obydwu i wyniki przedstawić w postaci zakresu?
- Dla prezentowanych wyników, w którym przepływie (laminarnym/turbulentny) obserwujemy większe współczynniki oporów? A w którym obserwujemy większe straty ciśnienia? Dlaczego tak jest?
- Czy w ogóle możemy przeprowadzać eksperyment dla wody na mniejszej rurce a następnie przenosić te wyniki na duży rurociąg, w którym płynie ropa naftowa? Dlaczego? Czy przedstawianie wyników w formie bezwymiarowej (współczynnik strat – liczba Reynoldsa) ma coś z tym wspólnego?
- Jakie będą całkowite straty ciśnienia w projektowanym rurociągu? Jaki dodatkowy roczny koszt w złotych spowodują te straty (zakładając, że w rurociągu przepływa ropa naftowa 24h na dobę, codziennie przez cały rok)? Jak chropowatość wpłynie na te straty i koszt – czy może lepiej zaproponować inny materiał wykonania rurociągu? Czy zmiana średnicy rurociągu może wpłynąć pozytywnie na zmniejszenie strat liniowych (przy zachowaniu tego samego natężenia przepływu), dlaczego? Jak zwiększenie temperatury płynącej ropy naftowej o np. 60 °C wpłynie na straty? Jak te zmiany wpłyną na koszty? Uwaga, za właściwości ropy naftowej należy przyjąć właściwości oleju – Dodatek.

### Podsumowanie, uwagi końcowe i porady

- Dane najlepiej wprowadzić do arkusza kalkulacyjnego (np. *Excel*)
- Od razu zamienić jednostki i na nie uważać
- Kroki:
  - wyliczyć prędkości, liczby Reynoldsa i spadki ciśnień
  - wyliczyć współczynniki oporu
  - wyliczyć niepewności pomiarowe
  - dokonać aproksymacji wyników eksperymentalnych – funkcją potęgową (9)
  - porównać wyniki z wartościami z korelacji



- przeprowadzić obliczenia w celu odpowiedzi na pytania oraz w celu określenia całkowitego spadku ciśnienia w projektowanym rurociągu.

## 4. Dodatki

### Chropowatość

Chropowatość  $\varepsilon$  możemy interpretować jako średnia wysokość nierówności ściany wewnętrznej rury. Chropowatość powstaje w czasie produkcji i może się zwiększać wraz z eksploatacją – np. przez korozję czy nagromadzenie zanieczyszczeń. Jest też związana z materiałem z jakiego powstała rura (dla szkła czy tworzywa sztucznego często przyjmuje się, że jest gładka). W przepływach laminarnych chropowatość pomija się, natomiast w przypadku przepływów turbulentnych może mieć znaczenie.

Przykład osadów we wnętrzu rury:



Źródło, CC BY-NC

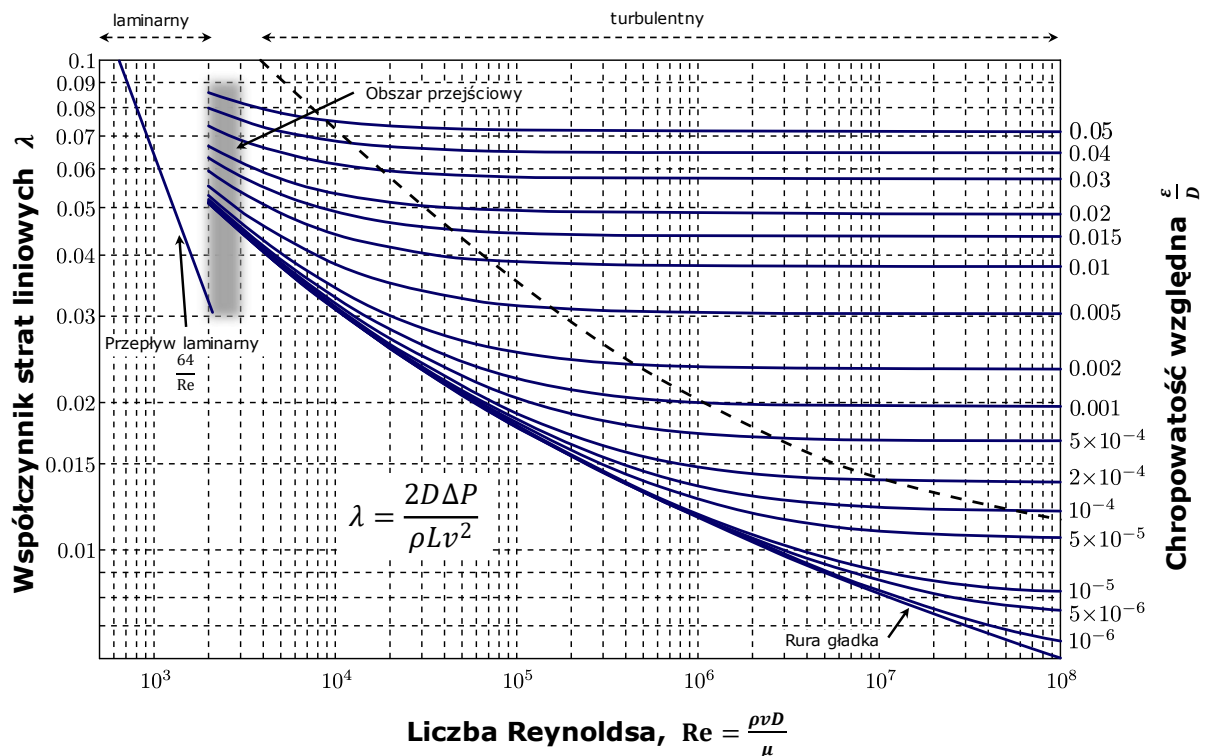
Przykładowe wartości chropowatości dla różnych materiałów:

Materiał	Chropowatość $\varepsilon$ [mm]
Stal (nowa)	0.002
Stal (lekko skorodowana)	0.15 – 1.0
Stal (mocno skorodowana)	do 3.0
Stal (ocynkowana)	0.15
Żeliwo (nowe)	0.26
Żeliwo (średnio zużyte)	0.4 – 0.6
Żelazo (ocynkowane)	0.15
Mosiądz lub miedź	0.0015
Beton (gładki)	0.04
Beton (chropowaty)	2.0
Guma	0.01

Uwaga – niepewności podanych wartości mogą sięgać nawet do 60%.

## Wykres Moody'ego

Wykres *Moody'ego* przedstawia współczynnik strat liniowych jako funkcja liczby Reynoldsa i chropowatości względnej  $\frac{\varepsilon}{D}$ .



Źródło: [Original diagram: S Beck and R Collins, University of Sheffield \(Donebythesecondlaw at English Wikipedia\) Conversion to SVG: Marc.derrumaux, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons.](#)

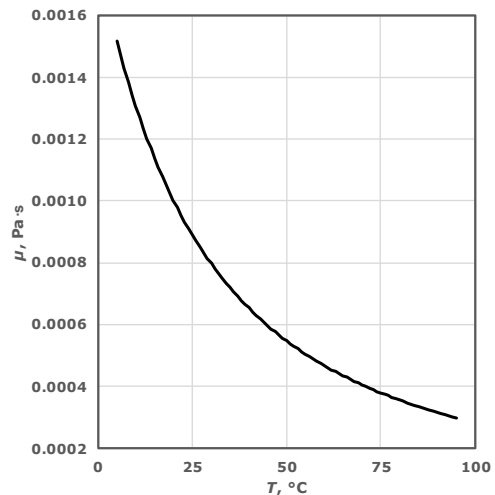
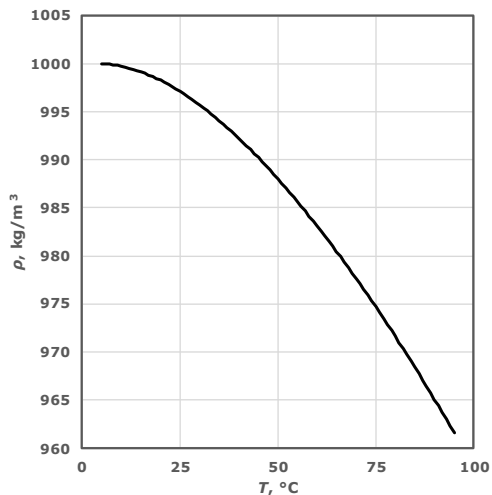
Analiza tego wykresu pozwala na wyciągnięcie kilku wniosków:

- Dla przepływu laminarnego współczynnik oporu maleje wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa i jest niezależny od chropowatości.
- Dla przepływu turbulentnego najmniejsza wartość współczynnika oporu jest dla rury gładkiej,  $\varepsilon = 0$  (sama wartość współczynnika jest niezerowa, ponieważ na ścianie płyn ma prędkość zero). Dla  $\varepsilon = 0$  równanie *Colebrooka* sprowadza się do równania *Prandtla*. Wartość współczynnika wzrasta wraz ze wzrostem chropowatości względnej.
- Wartości współczynnika dla obszaru przejściowego ( $2300 < Re < 4000$ ) zaznaczonego na szaro są najmniej godne zaufania. Przepływ może przechodzić z laminarnego na turbulentny tak samo jak współczynnik strat liniowych.
- Dla dużych liczb Reynoldsa (obszar na prawo od czarnej linii kreskowanej) wartości współczynnika strat liniowych są praktycznie płaskie dla danej chropowatości względnej, co czyni je niezależnymi od wartości liczby Reynoldsa. Dla  $Re \rightarrow \infty$  równanie *Colebrooka* sprowadza się do równania *von Kármána*. Wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa grubość podwarstwy lepkiej spada i jest na tyle mała, że jej wpływ można pominąć (w porównaniu do wysokości nierówności powierzchni spowodowanej chropowatością).

## Dane materiałowe dla wody

$T$ [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [Pa·s]	$T$ [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [Pa·s]	$T$ [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [Pa·s]
5	1000.0	0.001520	36	993.73	0.000705	67	979.34	0.000422
6	999.99	0.001473	37	993.37	0.000692	68	978.78	0.000416
7	999.96	0.001429	38	993.00	0.000678	69	978.21	0.000410
8	999.91	0.001386	39	992.63	0.000666	70	977.63	0.000404
9	999.85	0.001346	40	992.25	0.000653	71	977.05	0.000399
10	999.77	0.001308	41	991.86	0.000641	72	976.47	0.000394
11	999.68	0.001271	42	991.46	0.000629	73	975.88	0.000388
12	999.58	0.001236	43	991.05	0.000618	74	975.28	0.000383
13	999.46	0.001202	44	990.64	0.000607	75	974.68	0.000378
14	999.33	0.001170	45	990.22	0.000596	76	974.08	0.000373
15	999.19	0.001139	46	989.80	0.000586	77	973.46	0.000369
16	999.03	0.001109	47	989.36	0.000576	78	972.85	0.000364
17	998.86	0.001081	48	988.92	0.000566	79	972.23	0.000359
18	998.68	0.001054	49	988.47	0.000556	80	971.60	0.000355
19	998.49	0.001028	50	988.02	0.000547	81	970.97	0.000351
20	998.29	0.001003	51	987.56	0.000538	82	970.33	0.000346
21	998.08	0.000979	52	987.09	0.000529	83	969.69	0.000342
22	997.86	0.000955	53	986.62	0.000521	84	969.04	0.000338
23	997.62	0.000933	54	986.14	0.000512	85	968.39	0.000334
24	997.38	0.000911	55	985.65	0.000504	86	967.73	0.000330
25	997.13	0.000891	56	985.16	0.000496	87	967.07	0.000326
26	996.86	0.000871	57	984.66	0.000489	88	966.41	0.000322
27	996.59	0.000852	58	984.16	0.000481	89	965.74	0.000319
28	996.31	0.000833	59	983.64	0.000474	90	965.06	0.000315
29	996.02	0.000815	60	983.13	0.000467	91	964.38	0.000311
30	995.71	0.000798	61	982.60	0.000460	92	963.70	0.000308
31	995.41	0.000781	62	982.07	0.000453	93	963.01	0.000304
32	995.09	0.000765	63	981.54	0.000447	94	962.31	0.000301
33	994.76	0.000749	64	981.00	0.000440	95	961.62	0.000298
34	994.43	0.000734	65	980.45	0.000434			
35	994.08	0.000720	66	979.90	0.000428			

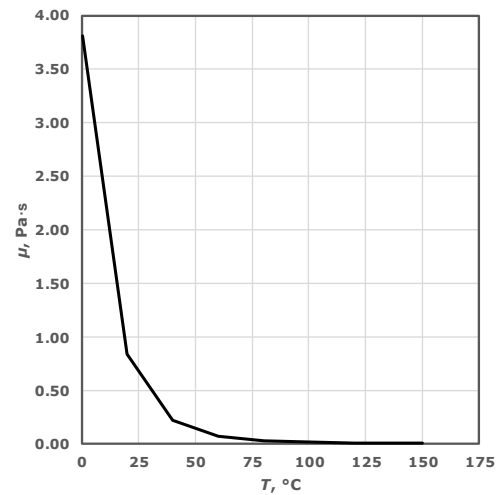
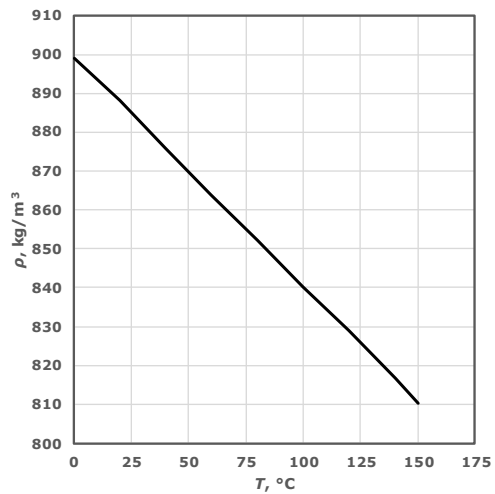
Dla czystej wody pod ciśnieniem atmosferycznym. *Fluid Mechanics Fundamentals and Applications* - Yunus Cengel, John Cimbala.



## Dane materiałowe dla oleju

$T$ [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\mu$ [Pa · s]
0	899.0	3.814
20	888.1	0.837400
40	876.0	0.217700
60	863.9	0.073990
80	852.0	0.032320
100	840.0	0.017180
120	828.9	0.010290
140	816.8	0.006558
150	810.3	0.005344

Nieżywany olej silnikowy. *Fluid Mechanics Fundamentals and Applications* - Yunus Cengel, John Cimbala.



## Karta pomiarowa

**Zespół:**

**Data:**

Projektowany mosiężny rurociąg:

- Czynnik: ropa naftowa o temperaturze:
- Średnica rurociągu:
- Długość rurociągu:
- Docelowe objętościowe natężenie przepływu:

<b>Przepływ laminarny</b>			
$h_1$ [cm] Poziom wody w rurce pierwszej	$h_2$ [cm] Poziom wody w rurce drugiej	$V$ [l] Mierzona objętość wody	$t$ [s] Zmierzony czas napełniania naczynia

<b>Przepływ turbulentny</b>		
$\Delta P$ [bar] Różnica ciśnień	$V$ [l] Mierzona objętość wody	$t$ [s] Zmierzony czas napełniania naczynia